



Integración y  
medida  
**Grado en Matemáticas  
Aplicadas**

## GUÍA DOCENTE

**Asignatura:** Integración y medida

**Titulación:** Grado en Matemáticas Aplicadas

**Carácter:** Obligatoria

**Idioma:** Castellano

**Modalidad:** Presencial

**Créditos:** 6

**Curso:** 2º

**Semestre:** 2º

**Profesores/Equipo docente:** Dr. D. Carlos Di Prisco de Venanzi

### 1. COMPETENCIAS Y RESULTADOS DE APRENDIZAJE

#### 1.1. Competencias

##### Competencias básicas

- CB1, CB2, CB3, CB4, CB5.

##### Competencias generales

- CG1. (Conocer) Demostrar poseer y comprender, a partir de la base de la educación secundaria, la naturaleza, conceptos, métodos y resultados más relevantes de los diferentes campos de las Matemáticas.
- CG2. (Aplicar) Saber aplicar los conocimientos adquiridos en la definición y planteamiento de problemas y en la búsqueda de sus soluciones en contextos matemáticos y no matemáticos.
- CG5. (Aprender) Haber desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender, con un alto grado de autonomía, posteriores estudios especializados en el campo de las matemáticas o en cualquier otra disciplina que requiera conocimientos de matemáticas.

##### Competencias transversales

- CT1. (Comunicar) Comunicar de forma oral o escrita información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado.
- CT5. (Trabajar en equipo) Saber trabajar en equipo contribuyendo de forma activa al resultado de problema o proyecto a resolver.
- CT6. (Autonomía) Aprender de manera autónoma nuevos conocimientos y técnicas para adaptarse a nuevas situaciones en el entorno de las Matemática Aplicadas u otros.

### Competencias específicas

- CE1. (Comprender) Comprender el lenguaje matemático para utilizarlo con soltura.
- CE2. (Asimilar) Relacionar la definición de nuevos objetos matemáticos con otros conocidos para asimilarlos y deducir sus propiedades.
- CE3. (Demostrar) Identificar las ideas esenciales de las demostraciones de algunos teoremas básicos sabiéndolas adaptar para obtener otros resultados.
- CE4. (Abstraer) Saber abstraer las propiedades estructurales, distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales, para formular hipótesis y saber confirmarlas o refutarlas.
- CE5. (Resolver) Adquirir las técnicas y herramientas matemáticas adecuadas para planificar la resolución de problemas de matemáticas.

### **1.2. Resultados de aprendizaje**

El estudiante al finalizar esta materia deberá:

- Conocer Distinguir los conjuntos medibles de los no medibles, ser capaz de analizar si un conjunto dado lo es, y calcular su medida si la situación lo requiere y permite.
- Conocer los fundamentos de la integral de Lebesgue y sus diferencias con la integral de Riemann.
- Ser capaz de utilizar los teoremas básicos de Integración para concluir propiedades teóricas de las funciones y conjuntos, así como para demostrar otros resultados más avanzados.
- Comprender y dominar las propiedades elementales de las integrales de funciones de varias variables, así como las demostraciones de algunos teoremas clásicos de integración: Fubini, cambio de variables, Green, Stokes y Gauss.
- Dominar la aplicación del cálculo integral en contextos relacionados con la Física y la Geometría (cálculo de áreas, longitudes, volúmenes, centros de gravedad).

## **2. CONTENIDOS**

### **2.1. Requisitos previos**

Haber cursado Ampliación de Cálculo.

### **2.2. Descripción de los contenidos**

Medida de Lebesgue. Funciones medibles. Los teoremas de la convergencia monótona y dominada. Integral de Lebesgue. Integral de funciones de una variable. Relación con la integral de Riemann. Integral de funciones de varias variables. Integrales de línea y de superficie. Teoremas Integrales. Espacios de Hilbert, definición y propiedades básicas. El espacio de funciones de cuadrado integrable L2. Desarrollo en serie trigonométrica de las funciones L2.

### 2.3. Contenido detallado

#### Presentación de la asignatura

#### Explicación de la guía docente

- **Medidas**

- Álgebras y  $\sigma$ -Álgebras. Definición y propiedades.
- Medidas. Definición, propiedades y ejemplos. Completación de medidas.
- Medidas exteriores. Construcción de medidas por el teorema de Carathéodory.
- Medidas de Borel en la recta. Medidas de Lebesgue-Steltjes. Propiedades de la medida de Lebesgue.

- **Integración en una variable**

- Funciones medibles. Definición, propiedades y ejemplos. Aproximación por funciones simples.
- Integración de funciones no negativas. Definición, propiedades y ejemplos. Teorema de la convergencia monótona. Lema de Fatou.
- Integración de funciones reales. Definición, propiedades y ejemplos. Teorema de la convergencia dominada. Teorema de derivación bajo signo integral.
- Comparación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue.

- **Integración en varias variables**

- Medida producto. Definición y propiedades. Teorema de Fubini-Tonelli.
- Medida de Lebesgue en n-dimensiones. Definición y propiedades. Teorema del cambio de variable e integración en coordenadas polares.

- **Espacios de Hilbert**

- Definición, propiedades y espacios  $L^2$ . Espacio dual. Desigualdad de Bessel e identidad de Parseval. Isomorfismos entre espacios de Hilbert separables.
- Series de Fourier para funciones periódicas. El problema de la convergencia puntual de la serie de Fourier.

### 2.4. Actividades dirigidas

Durante el curso, se requerirá la realización de una o más actividades dirigidas, planteadas como trabajos orientados al aprendizaje y aplicación de los nuevos conceptos aprendidos o su ampliación. Las actividades se desarrollan de forma individual o en grupo.

## 2.5. Actividades formativas

CÓDIGO	ACTIVIDAD FORMATIVA	HORAS	PORCENTAJE DE PRESENCIALIDAD
AF1	Clases de teoría y problemas	45	100%
AF2	Tutorías	15	70%
AF4	Estudio individual y trabajo autónomo	72	0%
AF5	Trabajos individuales o en grupo	12	0%
AF6	Evaluación	6	100%

## 3. SISTEMA DE EVALUACIÓN

### 3.1. Sistema de calificaciones

El sistema de calificaciones (R.D. 1125/2003, de 5 de septiembre) será el siguiente:

0 - 4,9 Suspenso (SS)

5,0 - 6,9 (Aprobado (AP)

7,0 - 8,9 Notable (NT)

9,0 - 10 Sobresaliente (SB)

La mención de «Matrícula de Honor» podrá ser otorgada a alumnos que hayan obtenido una calificación igual o superior a 9,0. Su número no podrá exceder del cinco por ciento de los alumnos matriculados en una materia en el correspondiente curso académico, salvo que el número de alumnos matriculados sea inferior a 20, en cuyo caso se podrá conceder una sola «Matrícula de Honor».

### 3.2. Criterios de evaluación

#### Convocatoria ordinaria

Sistemas de evaluación	Porcentaje
SE1 Prueba parcial	15%
SE2 Examen final	60%
SE3 Presentación de trabajos	25%

#### Convocatoria extraordinaria

Sistemas de evaluación	Porcentaje
SE2 Examen final	75%
SE3 Presentación de trabajos	25%

### 3.3. Restricciones

#### Calificación mínima

La ponderación tanto del examen parcial como de los conceptos de participación y trabajos escritos/prácticas, sólo se aplicará si el alumno obtiene al menos un 5 en el examen final.

Es imprescindible la entrega de todos los trabajos y prácticas propuestas en la asignatura. Para poder hacer media de los trabajos/prácticas es necesario obtener en cada uno de ellos una nota igual o superior a 3.5 puntos, y la nota media de todos los trabajos/prácticas deber ser superior o igual a 5. La no superación de los trabajos/prácticas supone el suspenso automático de la asignatura.

La convocatoria extraordinaria consiste en un examen sobre los contenidos de la asignatura desarrollados en las clases de teoría y problemas. Este examen pondera un 75%, el resto de la nota final corresponde a la calificación de las entregas de trabajos evaluables solicitados durante el periodo docente. Si estos trabajos están suspensos en la convocatoria ordinaria, pueden ser recuperados en convocatoria extraordinaria previa petición del estudiante al profesor. Esta petición se debe realizar por escrito en un plazo máximo de 10 días después de la publicación de la nota final de la convocatoria ordinaria. Esta ponderación también se aplica sólo en el caso de que el alumno obtenga al menos un 5 en este examen final.

#### Asistencia

El alumno que, injustificadamente, deje de asistir a más de un 25% de las clases presenciales podrá verse privado del derecho a examinarse en la convocatoria ordinaria.

#### Normas de escritura

Se prestará especial atención en los trabajos, prácticas y proyectos escritos, así como en los exámenes tanto a la presentación como al contenido, cuidando los aspectos gramaticales y ortográficos. El no cumplimiento de los mínimos aceptables puede ocasionar que se resten puntos en dicho trabajo.

### 3.4. Advertencia sobre plagio

La Universidad Antonio de Nebrija no tolerará en ningún caso el plagio o copia. Se considerará plagio la reproducción de párrafos a partir de textos de autoría distinta a la del estudiante (Internet, libros, artículos, trabajos de compañeros...), cuando no se cite la fuente original de la que provienen. El uso de las citas no puede ser indiscriminado. El plagio es un delito.

En caso de detectarse este tipo de prácticas, se considerará Falta Grave y se podrá aplicar la sanción prevista en el Reglamento del Alumno.

### 3.5. Uso de la inteligencia artificial (IA) generativa en las actividades formativas

La adopción de herramientas de IA en la docencia debe basarse en un enfoque transparente, responsable, ético y seguro, que fomente el desarrollo de competencias digitales en el estudiantado:

- El profesor incluirá en cada actividad formativa si tiene previsto el uso de IA Generativa, con qué objetivo y los requisitos de aplicación de esta.
- Es responsabilidad del estudiante mostrar una conducta transparente, ética y responsable con el uso de IA Generativa, y adaptarse a los criterios de aplicación dictados por el profesor en cada actividad.
- La detección de cualquier conducta fraudulenta con respecto al uso de IA Generativa, no atendiendo a las indicaciones del profesorado, aplicará las sanciones previstas en el Reglamento Disciplinario.

## 4. BIBLIOGRAFÍA

### Bibliografía básica

- DL. Cohn, *Measure Theory: Second Edition*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, 2013.
- Folland GB. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Second ed. New York: Wiley; 1999.

### Bibliografía de prácticas

- GB. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Second ed. New York: Wiley; 1999.

### Bibliografía complementaria

- W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis. 3rd Edition*, McGraw-Hill, New York, 1976.
- W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed, McGraw-Hill, Inc., USA, 1987.
- P. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, 1950.
- G. de Barra. *Measure Theory and Integration*. John Wiley, 1981
- T. Tao. *An Introduction to Measure Theory*. AMS, 2011.
- J. Cerdá, *Análisis Real*, Editions Universitat de Barcelona, 1996.
- A. García-Nogales, *Teorías de la medida y de la probabilidad*, Colecciones manuales-uex-57, 2008.